不動点定理

滋賀大学経済学部　近藤豊将

筆者はマクロ財政学や数理経済学を専門とする経済学者なのだが、最近の文理融合の潮流の中で、もともと興味のあった数学の研究にも乗り出している。実際にやってみると、この分野も経済学に勝るとも劣らずエキサイティングな世界である。ここでは、筆者らの最近の論文[1],[2],[3]に関係して、**不動点定理**について数学の予備知識を前提とせずに解説し、その界隈での研究の雰囲気の一端をお伝えしたい。

写像（または関数）というのは、平たく言えば、「何か」に対して「何か」を対応させる規則のことである。例えば、$f(x)=x^2$ という写像は、1 に対しては 1^2 を、2 に対しては 2^2 を対応させる規則を表している。物事が（x から x^2 へというように）変化していく決まりを定めているとみなすこともできる。

そのような変化の法則の中で、“動かない点”が存在する場合もある。上の例でいえば、0 と 1 である。実際、$f(0)=0^2=0$ だし $f(1)=1^2=1$ なので、この 2 点は写像 f で移しても動かない。このような点を f の**不動点**という。写像 f の不動点 x は、式を用いて $f(x)=x$ と表現できる。

このうつろいやすい世の中で“動かないもの”というのは、時代を超えて本質的で重要なもののような気がしないだろうか。そのような哲学的な問いはさておき、不動点は数学的に古くから研究されてきたし、教科書レベルで紹介されることもある重要な概念である。ただし、文系の学生でもふれる機会の多い微分積分学や線型代数学の教科書ではあまりお目にかからない。理工系の多くの学生が、1 年時の微分積分学、線型代数学に続いて 2 年生で習う科目に「集合と位相」という科目があるのだが、そこで「**縮小写像の不動点定理**」というものが紹介されることが多い。これが多くの人にとって、不動点定理との最初の出会いとなる。

縮小写像というのは、2 点間の距離を縮小する（ちぢめる）写像のことである。簡単な場合で説明しよう。写像 f を実数の集合上の写像とする。つまり、実数 x に対して、実数 f(x) が対応する決まりが与えられているとする。この写像 f が縮小写像であるとは、ある 0 以上 1 未満の定数 r が存在し、どんな実数 x,y をとったとしても、

$$|f(x)-f(y)| \le r|x-y|$$

が成り立つことである。両辺に表れているタテ棒｜｜はあのなつかしい絶対値記号であり、差の絶対値$|x-y|$は 2 つの実数 x と y がどれぐらい離れているか、つまり x と y の**距離**を表している。したがって、上の式は x と y の間の距離$|x-y|$に比べて、写像で移された先の 2 点$f(x), f(y)$の間の距離$|f(x)-f(y)|$がちぢんでいることを意味する。定数 r は“ちぢみ率の上限”というわけである。具体的には、写像 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$はちぢみ率 1/2 の縮小写像である。

縮小写像の不動点定理が主張するのは、以下のような内容である。

定理. X を完備距離空間、f を X から X への縮小写像とする。このとき、X 内に f の不動点がただ一つ存在する。

ここで、**距離空間**というのは、2 点間の距離が定まった集合のことである。実数の集合に差の絶対値をセットにした世界が代表選手だと思ってもよいが、実は距離空間というのは、様々な無限次元空間をも特殊ケースとして包含する、きわめて広大かつ豊饒(ほうじょう)な世界である。

完備というのは実数の集合のように“スキがない”ことを表現している。（これが有理数の集合だと、円周率πなどは含まれず、スキだらけなのである。）

この定理には、二つの主張が含まれている。

（1）不動点が存在するということと、

（2）（存在するならば）それは一つだけだ、

ということである。ここでは、X=実数の集合の場合で（2）を証明してみる。“不動点が（それは存在するとして）一つだけである”ことの証明である。どうすれば証明できたことになるだろうか？（5 分間考えてみましょう。） 次のようにすればよい。

2 点 x と y を両方、写像 f の不動点だと仮定すると、必然的に x=y とならざるを得ないことを示すのである。二つあるかと思いきや、どうあがいてもそれらは別のものではありえない、したがって、不動点は（存在するならば）一つだけだ、というわけである。やってみよう：

不動点の一意性の証明. 2 点 x と y を両方、写像 f の不動点とする。（目標は、$x = y$を示すことである。お忘れなく。）写像 f は、縮小写像なので、

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$$

が満たされる。ここで、r は 0 以上 1 未満の実数である。2 点 x と y は写像 f の不動点なので、x=f(x)と y=f(y)が成り立つ。これらを上の式に代入すると、

$$|x - y| \leq r|x - y|$$

が得られる。移項して整理すると、

$$(1 - r)|x - y| \leq 0$$

となる。定数 r は(0 以上)1 未満なので、$1 - r$は 0 より大きい数である。したがって、それで両辺を割っても、（中学校で習ったように）不等号の向きは変わらない。よって、

$$|x - y| \leq 0$$

を得る。絶対値をとって 0 以下ということは、$x - y = 0$ということである。したがって、$x = y$となる。（証明終わり）

なんという華麗な証明であろうか。現代数学を勉強すると、このような論法を自家薬籠中(じかやくろうちゅう)のものとして自由自在に駆使し、様々な現象を数理的に解析できるようになるのである！ さあ、あなたも今すぐ現代数学を勉強しよう！ そのために好適な本として、大家の筆による下の[4]を挙げておく。

冒頭で紹介した筆者らの最近の論文では、縮小写像よりもかなり一般的なある種の写像について不動点定理を証明し、さらに不動点を近似する点列の構成方法を示した。後半部分の意味するところは、“このように点列をつくり極限をとれば、その点列の収束先は不動点になる”ということである。そのような**不動点近似**の方法は何通りか知られており、それらを一般化したり洗練したりする試みが、日夜、続けられているのだ。

研究の進展を目指す人たちの不断の努力により、ときにはシャープに、ときには大胆に手法や概念が革新されていくサマを見るのは、誠に感動的でエキサイティングである。しかし、そのような感動を至近距離で味わおうと思えば、自らも革新に貢献する努力が求められる。大学の社会的評価も、そこに所属する個々の研究者の努力の集積により定まるのである。近年、日本の大学の国際的な存在感の低下が問題視される中で、個々の研究者がフルパワーを発揮するための環境整備が俟たれている。本学経済学部について言えば、卒業生の皆様のご支援により、多大な恩恵を受けていることに改めてお礼を申し上げます。

[1] A. Kondo and W. Takahashi, Attractive point and weak convergence theorems for normally N-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, *Linear and Nonlinear Analysis* 3 (2017), 297-310.
[2] A. Kondo and W. Takahashi, Strong convergence theorems of Halpern's type for normally 2-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 19 (2018), 617--631.
[3] M. Hojo, A. Kondo and W. Takahashi, Weak and Strong Convergence Theorems for Commutative Normally 2-Generalized Hybrid Mappings in Hilbert Spaces, *Linear and Nonlinear Analysis*, Vol. 4 (2018), No. 1, 117-134.
[4] 高橋渉『非線形・凸解析学入門』横浜図書

（平成 30 年 9 月）