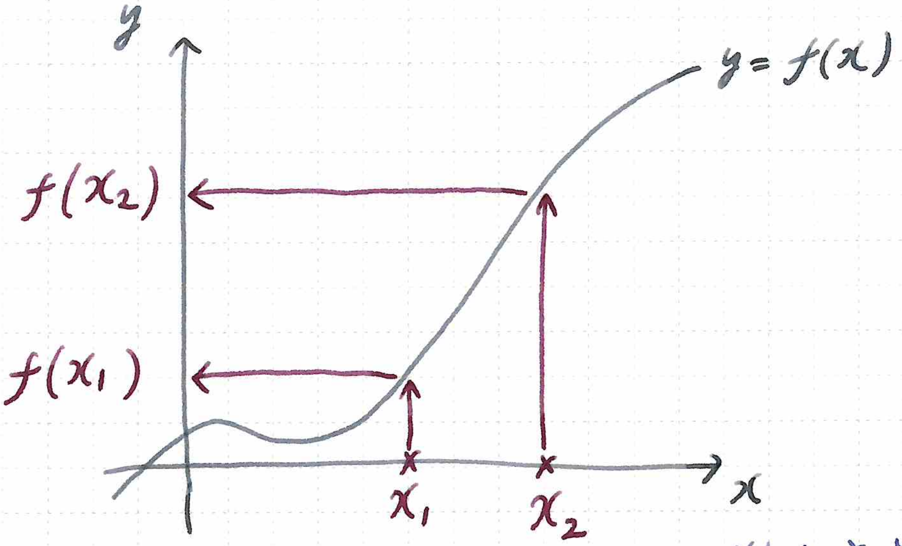
関数について

関数

「何か」に対して「何か」を対応させる規則。

〈結果〉
従属変数

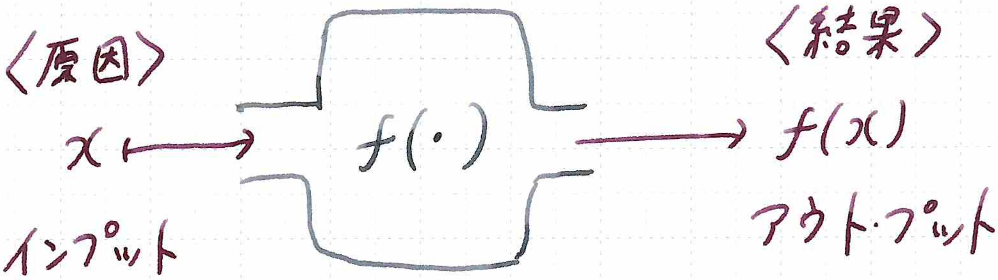


独立変数
〈原因〉

原因が x_1 から x_2 に変化

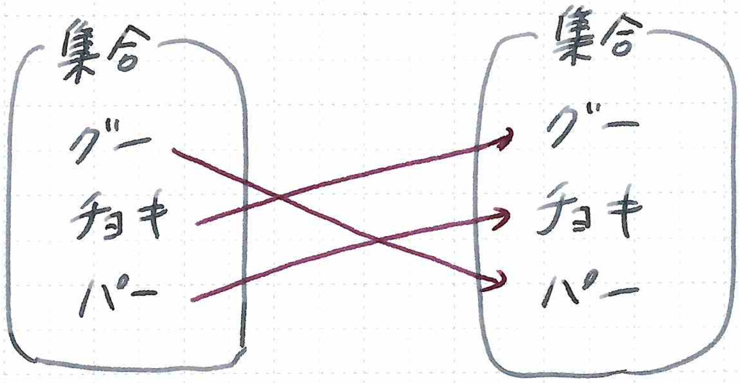
$\Rightarrow$ 結果は、$f(x_1)$ から $f(x_2)$ に変化。

関数のブラック・ボックスを用いた説明。



関数(function)の仲間

- 写像(mapping)



グー $\longmapsto$ パー

チョキ $\longmapsto$ グー

パー $\longmapsto$ チョキ

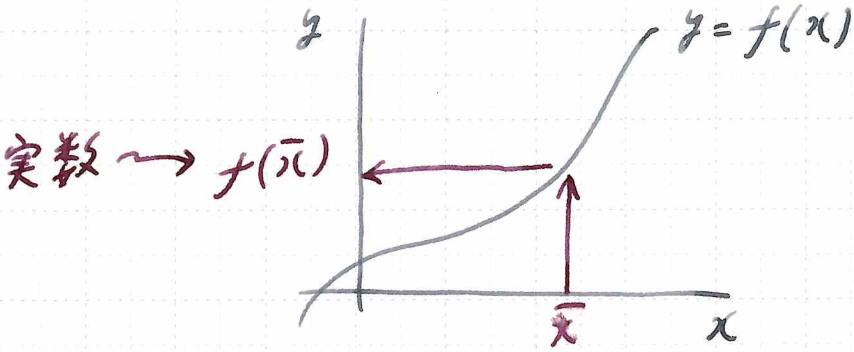
↑

それぞれに写されている。

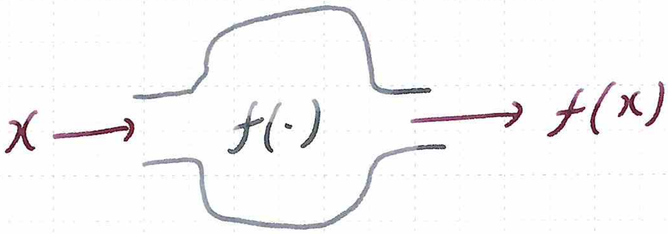
(マップされている)

• 関数 (function)

特に日本語の"関数"は、
"数に関係づける"という意味で、
対応する側が数の集合の場合に
使うことが多い。



• 作用素 (operator)



↑

xにfが作用してf(x)が生み出されている。

例.

$f(x) = x^2 - 1$

この関数は.

$$1 \longmapsto 1^2 - 1 = 0$$

に対して　　　　が対応する。

同様に.

$$2 \longmapsto 2^2 - 1 = 3$$

$$3 \longmapsto 3^2 - 1 = 8$$

$$-4 \longmapsto (-4)^2 - 1 = 15$$

という対応関係となる。

では. $a+1$ (という実数) に対しては.

何が対応するか?

$$a+1 \longmapsto (a+1)^2 - 1$$

$$= a^2 + 2a \quad (これも実数)$$

この実数が対応する。

Σ の扱い方

@ 最初は、Σを外して書き下してみる。

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$k=1$のとき　…

$k=0$のとき

@ $\sum_{k=0}^{n} a_k$ において、添字(そえじ) k はどの記号を使ってもよい。

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

この $0, 1, 2, \cdots, n-1, n$ を代表的に表すために、ここでは k を使っているだけ。

i などを使ってもよい。

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

@ 同じ内容でも書き方は色々ある。

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$$

$$RHS = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} = a_{1-1} + a_{2-1} + \cdots + a_{(n+1)-1}$$

$$= a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k = LHS.$$

//

(注) 定数についての $\sum$ (総和)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A$ (A: 定数)

これはどういう意味か？

$$\sum_{k=0}^{n} A = A + A + A + \cdots + A$$

k=0のとき　k=1のとき　k=nのとき

これは A を n+1 コ足したもの！

$$= A(n+1).$$

@ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n = ?$

$$\sum_{k=1}^{3} 3 = 3 + 3 + 3 = 3\cdot 3 = 9$$

k=1のとき　k=2のとき　k=3のとき

同様に、

$$\sum_{k=1}^{n} n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n\text{コ}} = n^2$$

線型性について

Def.

f: linear

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall x, y$: 変数, ${}^\forall \alpha, \beta$: 定数,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

和と定数(スカラー)倍をバラせる!

ex

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

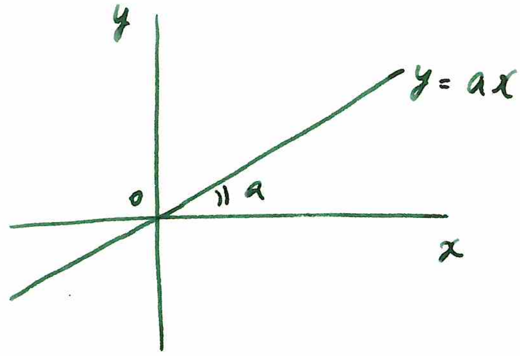
$f(x) = ax \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}$ ← 正比例

$\Rightarrow f$: linear

$(\because)$ Let $x, y \in \mathbb{R}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= a(\alpha x + \beta y) \\ &= a\alpha x + a\beta y \\ &= \alpha \cdot ax + \beta \cdot ay \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

//



ex

$f(x) = x^2$

$\Rightarrow f$: nonlinear 非線型（線型ではない）

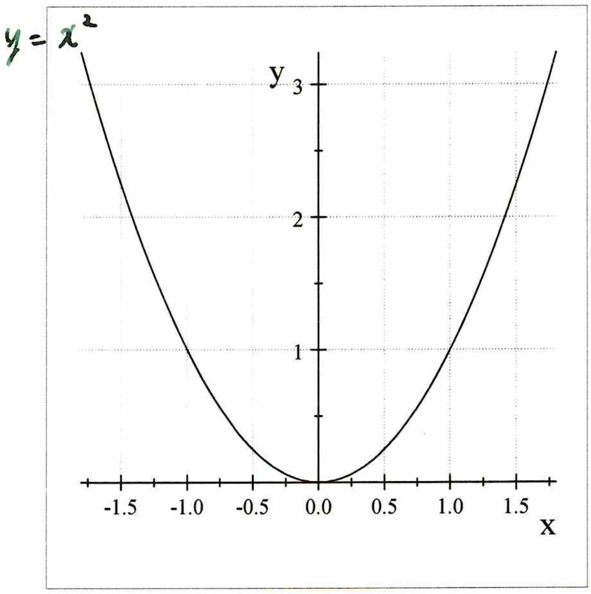
$(\because)$

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2$$

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha x^2 + \beta y^2$$

$$\therefore f(\alpha x + \beta y) \neq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

//



Th

Equivalent

① f: linear

i.e. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

② (i) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (スカラー倍)

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (和)

Proof

① ⇒ ②

(i) Letting $\beta = 0$ in ①, we have

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

(ii) Letting $\alpha = \beta = 1$ in ①, we have

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

⌟

② ⇒ ①

$$\begin{aligned} & f(\alpha x + \beta y) \\ &\quad = f(\alpha x) + f(\beta y) && \text{(ii)} \\ &\quad = \alpha f(x) + \beta f(y) && \text{(i)} \end{aligned}$$

//

f: linear

$\Rightarrow f(x-y) = f(x) - f(y)$

Proof

$f(x-y)$

$= f(x + (-1)y)$

$= f(x) + f((-1)y)$

$= f(x) + (-1)f(y)$

$= f(x) - f(y).$

//

Th

f: linear

$$\Rightarrow f(\alpha x+\beta y+\gamma z) = \alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z)$$

Proof

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\
&= f((\alpha x+\beta y)+\gamma z)\\
&= f(\alpha x+\beta y)+\gamma f(z)\\
&= (\alpha f(x)+\beta f(y))+\gamma f(z)\\
&= \alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z).
\end{aligned}$$

$\alpha x+\beta y$ をひとかたまりとみなし、2つの要素 $\alpha x+\beta y$ と γz に分け、線型性の定義を適用している。

//

Cor

f: linear

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

※ f: linear なら

有限コの和とスカラー倍でもバラせる。

同値

① f : linear

i.e. $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$

② $f(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z)$

Proof

①⇒②

We've already done.

②⇒①

From ②,

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z) \quad \text{— } (*)$$

$$\forall x, y, z;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Substituting $\gamma=0$ into $(*)$, we obtain

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

//

ex

微分作用素

$$(\alpha f+\beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

積分作用素

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,dx$$
$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

極限

$x_n \to x$

$y_n \to y$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$$
$$= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

↑

これらも線型性を持っている。

したがって

- $(f-g)' = f' - g'$
- $(\alpha f + \beta g + \gamma h)' = \alpha f' + \beta g' + \gamma h'$

などがいえる。

ex

総和(Σ)をとるという作用

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}y_i$$

check

($n=2$のケース)

$$LHS=\sum_{i=1}^{2}(\alpha x_i+\beta y_i)$$

$$=\underbrace{(\alpha x_1+\beta y_1)}_{i=1}+\underbrace{(\alpha x_2+\beta y_2)}_{i=2}$$

たす順番を入れかえている

$$=(\alpha x_1+\alpha x_2)+(\beta y_1+\beta y_2)$$

$$=\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{2}x_i+\beta\sum_{i=1}^{2}y_i$$

$$=RHS.$$

//

※ $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}y_i+\gamma\sum_{i=1}^{n}z_i$$

などもいえる。

2重シグマ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)$$

← カッコを補って考える

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\underset{j=1}{x_{i1}} + \underset{j=2}{x_{i2}} + \cdots + \underset{j=m}{x_{im}}\right)$$

$$= (x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m}) \quad i=1$$

$$+ (x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m}) \quad i=2$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ (x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm}) \quad i=n$$

2重シグマのケース

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha x_{ij}+\beta y_{ij})$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}+\beta\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_{ij}$$

check ($n=m=2$のケース)

$$LHS=\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{2}(\alpha x_{ij}+\beta y_{ij})\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\left[\underbrace{(\alpha x_{i1}+\beta y_{i1})}_{j=1}+\underbrace{(\alpha x_{i2}+\beta y_{i2})}_{j=2}\right]$$
$$=\left[(\alpha x_{11}+\beta y_{11})+(\alpha x_{12}+\beta y_{12})\right] \leftarrow i=1$$
$$+\left[(\alpha x_{21}+\beta y_{21})+(\alpha x_{22}+\beta y_{22})\right] \leftarrow i=2$$

$$=\alpha(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22})$$
$$+\beta(y_{11}+y_{12}+y_{21}+y_{22})$$

✓ たす順番を入れかえた。

$$= \alpha \left[(x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22}) \right]$$

$$+ \beta \left[(y_{11} + y_{12}) + (y_{21} + y_{22}) \right]$$

$$= \alpha \left(\sum_{j=1}^{2} x_{1j} + \sum_{j=1}^{2} x_{2j} \right)$$

$$+ \beta \left(\sum_{j=1}^{2} y_{1j} + \sum_{j=1}^{2} y_{2j} \right)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} y_{ij}$$

$$= RHS.$$

//

関数、シグマ、線型性

問題1. 関数 $f = -2x^2 - 3x + 1$ について、$x = -a + 2$における値 $f(-a+2)$ を答えなさい。

問題2. 関数fを線型写像とする。このとき、3つの変数x, y, zと定数α, β, γについて

$$(1)\quad f(x-y) = f(x) - f(y),$$
$$(2)\quad f(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma f(z)$$

が成り立つことを示せ。

問題3. 二重シグマをとるという作用について、シグマをとる順番は関係ない。つまり、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

である。このことを、$n = 2,\ m = 2$のケースで、シグマ記号をばらして確認しなさい。

問題4. 二重シグマをとるという作用は線型性を持つ。つまり、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha x_{ij} + \beta y_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$$

が成り立つ。ここで、α, βは定数（符号は問わない）である。このことを、$n = 2,\ m = 3$のケースで、シグマ記号をばらして確認しなさい。