二項定理

微分・積分の基本イメージ

二項定理

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k}$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

- $n=0$

$$LHS = 1$$

$$RHS = \sum_{k=0}^{0} {}_0C_0\, x^{-k} y^k$$

$$= {}_0C_0\, x^{-0} \cdot y^0 = 1.$$

- $n=1$

$$LHS = x + y$$

$$RHS = \sum_{k=0}^{1} {}_1C_k\, x^{1-k} y^k$$

$$= {}_1C_0\, x^1 y^0 + {}_1C_1\, x^{1-1} y^1$$

$$= x + y.$$

- $n=2$

$$LHS = (x+y)^2$$

$$RHS = \sum_{k=0}^{2} {}_2C_k\, x^{2-k} y^k$$

$$= {}_2C_0\, x^2 y^0 + {}_2C_1\, xy + {}_2C_2\, x^0 y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2.$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\, x^k y^{n-k}$$

二項定理の
表現方法は様々.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$

---

check

$n-k=l$ とおくと

- $k = n-l$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} = \sum_{l=0}^{n}$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{l=0}^{n} {}_nC_{n-l}\, x^l y^{n-l}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} {}_nC_l\, x^l y^{n-l}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$

文字を l から k に
置きかえた.

//

二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$

を n=2 のケースで説明

$$(x+y)^2 = \underbrace{(x+y)}_{①} \cdot \underbrace{(x+y)}_{②}$$

これを展開するには

(1) ①②の各から x 又は y のいずれか一つを取り出してかけ合わせる。

(2) それを足す（全部）。

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$

- ①②の両方から x を取り出してかけると x^2 になる。
  その取り出し方は一通り。
  ∴ x^2 の係数は 1.
- y^2 の係数も、同様に 1 になる。
- xy の係数はどうなるか？
  ①②から x を一つ選ぶ選び方の数は
  ${}_2C_1$
  一方から x を取り出せば、他方からは y を取り出すことに決まる。
  ∴ xy の係数は ${}_2C_1$ となる。

$n=3$ のケース

$$(x+y)^3 = \underset{①}{(x+y)}\underset{②}{(x+y)}\underset{③}{(x+y)}$$

この展開を考える。

(1) ①②③の各々から x 又は y のいずれかを取り出して、かけ合わせる。

(2) それらを全部足す。

このとき

- x^2y の係数はどうなるか？

①②③から x を2つ選ぶ選び方の数は

${}_3C_2$

2つから x を取り出せば残り一つからは y を取り出すことに決まる。

∴ x^2y の係数は ${}_3C_2$ である。

一般に

$$(x+y)^n = \underset{①}{\underline{(x+y)}}\,\underset{②}{\underline{(x+y)}}\cdots\cdots\underset{Ⓝ}{\underline{(x+y)}}$$

の展開を考えるとき

- $x^{n-r}y^r$ の係数はどうなるか？

nコのかけ算の因子①,②,…,ⓝ のうち

$n-r$コからxを取り出す.

その選び方の数は $_nC_{n-r} = {_nC_r}$ 通り,

nコのうち $n-r$コからxを取り出せば

残りrコからはyを取り出すことに決まる.

∴ $x^{n-r}y^r$ の係数は $\underline{_nC_r}$ である.

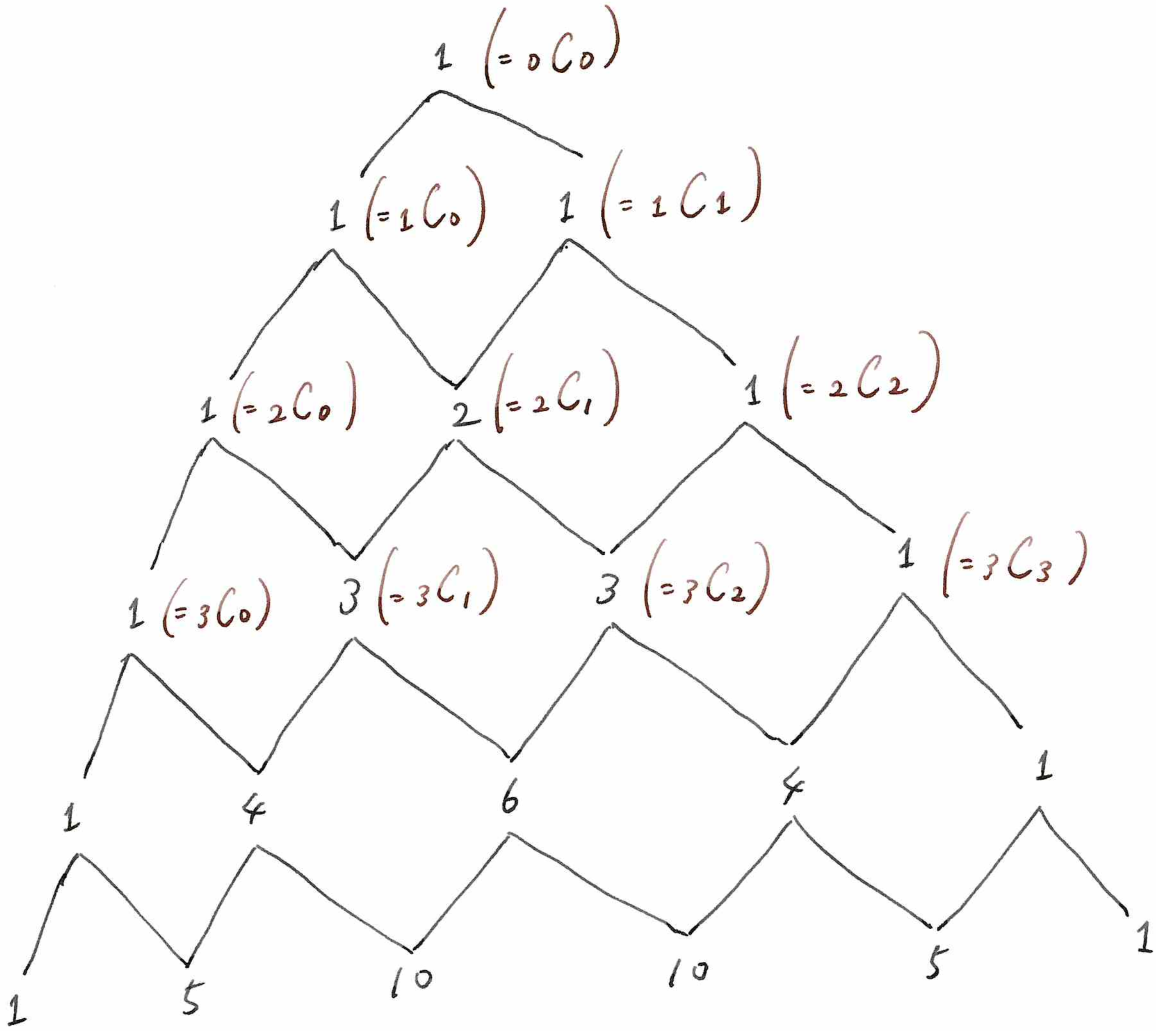
以上より

二項定理

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {_nC_k}\, x^{n-k} y^k}$$

が成り立つ。

二項係数の覚え方〜パスカルの三角形



$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

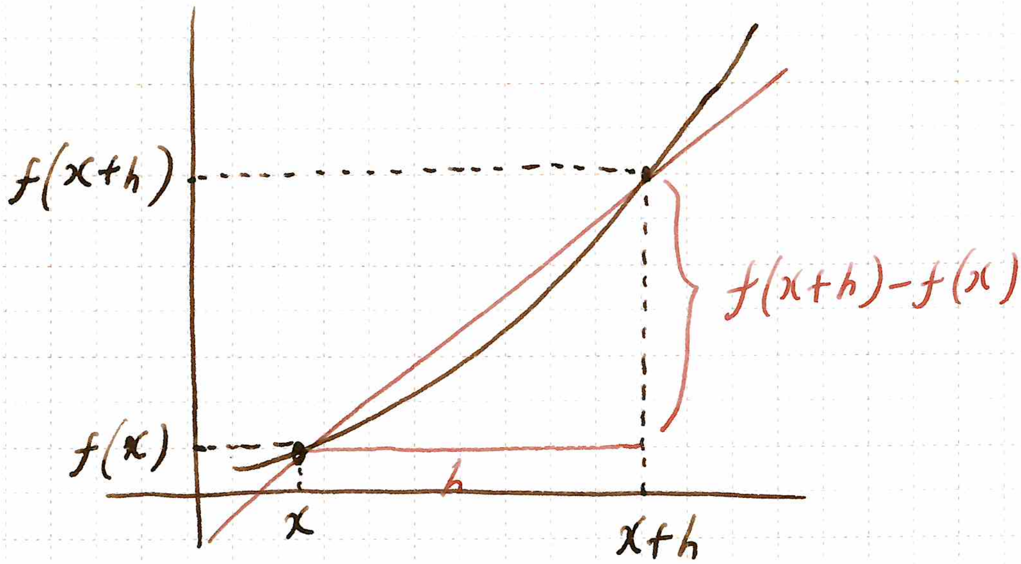
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\vdots$$

微分

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

点 $(x, f(x))$ における f のグラフの接線の傾き.



↑

$h>0$ の場合

$$\boxed{\text{微分} = - \div \lim}$$

引いて割って lim

ex

$f(x) = x^2$

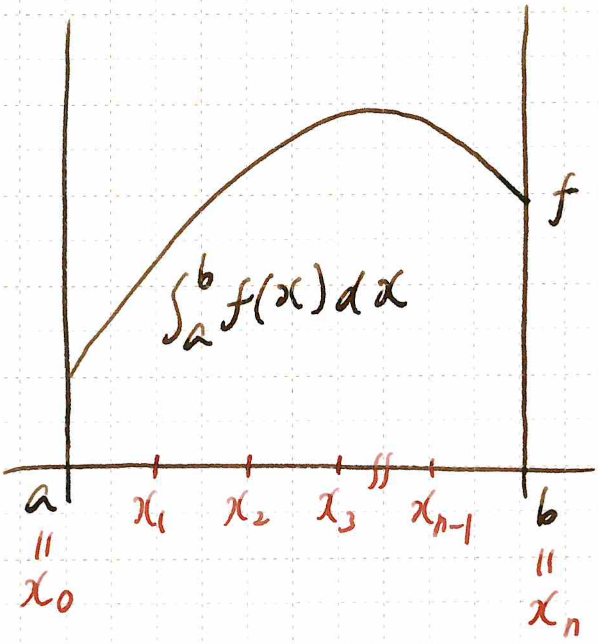
- $f'(1) = (?)$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2+h) = 2$$

- $f'(-2) = (?)$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-4+h) = -4$$

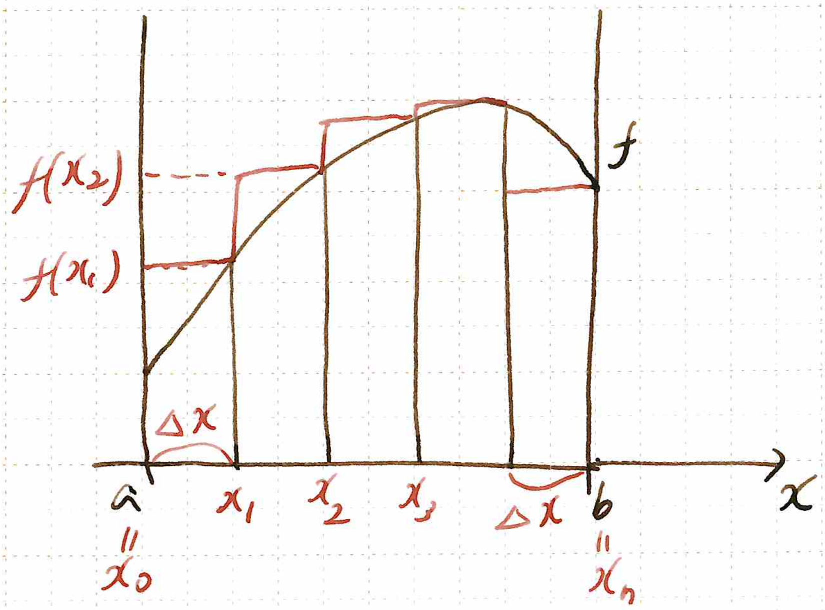
積分（区分求積法）



- 積分区間 $[a, b]$ を n 等分
- $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ とする。

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \frac{1}{n}(b-a)$$
$$x_2 = a + \frac{2}{n}(b-a)$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + \frac{n}{n}(b-a) = b$$

- $\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x} = \frac{1}{n}(b-a)$



$\int_a^b f(x)dx$ を長方形の面積

$f(x_i)\cdot\Delta x$ の和 $i=1,\cdots,n$

タテ × ヨコ

で近似する。

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

シグマ

Σ Sに相当するギリシャ文字

$\Delta x = \frac{1}{n}(b-a)$

$\Delta x \to 0 \ (\Leftrightarrow n \to \infty)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

タテ × ヨコ

Sum 和

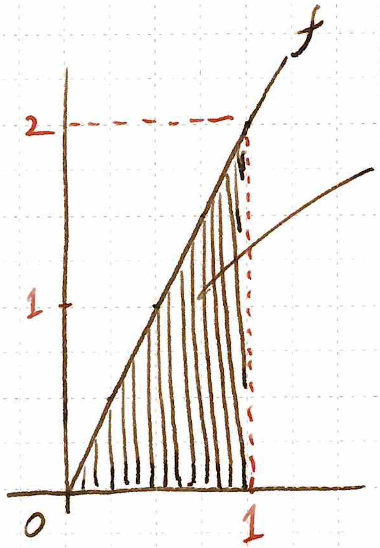
$$\boxed{積分 = \times + \lim}$$

かけて、足して、$\lim$

ex

$f(x) = 2x$

$\int_0^1 f(x)\,dx = (?)$



$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \frac{0}{n} = 0 \\ x_1 = \frac{1}{n} \\ x_2 = \frac{2}{n} \\ \cdots \\ x_i = \frac{i}{n} \\ \cdots \\ x_n = \frac{n}{n} = 1 \end{array}\right.$$

$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ ヨコの幅

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= 1.$$

問題1(二項定理). 二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{*}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 上式(*)をシグマ記号を使わずに, 最初の4項と最後の3項を実際に書いてみよ.

(2) $n = 1, 2, 3$の場合のそれぞれについて, 上の二項定理が正しいことを確認せよ.

(3) 上式(*)は

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} \tag{**}$$

と書いても同じである. (**)の最初の4項と最後の3項を実際に書き, (*)と同じであることを納得せよ.

問題2(微分).

(1) 関数$f(x) = -x^2$について, 微係数$f'(1), f'(-1), f'(-2)$を求めよ.

(2) 関数$f(x) = -x^2 + 2x + 1$について, 微係数$f'(-1)$を求めよ.

問題3(積分).

(1) 関数$f(x) = 2x + 1$について, $\int_0^1 f(x)dx$を区分求積法を用いて求めよ.

(2) 関数$f(x) = x$について, $\int_0^2 f(x)dx$を区分求積法を用いて求めよ.