不動点理論の研究

滋賀大学経済学部教授　近藤豊将

経済学における一般均衡やゲーム理論におけるナッシュ均衡の存在問題が、**不動点定理**を用いて解決される、という話を聞いたことのある人は、特に経済学部の関係者には多いのではないだろうか。その意味で不動点定理は経済学の理論的枠組みを整備するうえで不可欠である。経済学以外でも、力学系の平衡点や周期解、微分方程式の解なども、なんらかの写像の不動点として表現されることが多い。微分積分学でおなじみの中間値の定理も、不動点定理と深い関係を持つ。

不動点というのは、ある写像でマップしても動かない点ということであるから、特に理解しにくい概念ではなかろう。ある空ではない集合 X とそのうえで定義された写像 f:X→X があるとき、f の不動点とは、条件 f(x)=x を満たす点というだけのことである。例えば、f(x)=2x−5 の場合であれば、f の不動点 x は方程式 2x−5=x を満たすため、これを解いて x=5 と求めることができる。これは、代数的には連立方程式

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x \end{cases}$$

の解となる x であり、幾何学的には y=2x−5 と y=x のグラフ（それぞれ、Figure 1 における太線と細線）の交点の x 座標である。

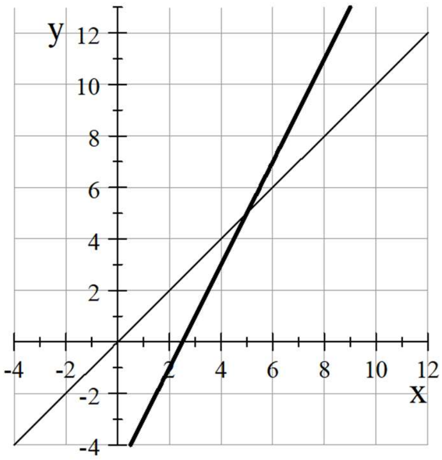


Figure 1.

上の例のように写像が具体的に与えられれば明示的に不動点が求まる場合もあるが、一般には《写像や（写像が定義されている）集合がなんらかの条件を満たす》というだけの情報を足掛かりに、**不動点が存在するか、いくつ存在するか、どうやって不動点を求めればよいか**、といった問いに挑まなければならない。このような手強い問題群も、その重要性から多くの一級の研究者たちによって注目され研究が積み重ねられてきた。ブラ

ウワーの不動点定理、縮小写像の不動点定理、（日本人の角谷静夫教授の名を冠した）角谷の不動点定理などを聞いたことのある方も多いだろう。縮小写像の条件を弱めた

$$(1)\quad \|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$$

を満たす写像 f は**非拡大写像**と呼ばれ、これまた多くの応用を持つことが知られている（ここで、$\|\cdot\|$ はノルムを表している）。そのため、この条件(1)を（他の重要なケースも包含するように）一般化する研究が盛んにおこなわれてきた。このように、不動点理論は極めてアクティブな研究領域として、世界中の研究者によって活発に研究されているのである。

そのような状況下で、筆者も理論経済学者の立場から不動点理論の発展に貢献すべく研究を行ってきた。特に 2022 年度には、過去 5 年ほどの研究をベースにして多くの研究成果を発表することができた。以下では、最近の筆者の研究経験をひとつの視角として、不動点理論の研究について紹介する。

筆者は 2017 年以降、（非拡大写像に対するものよりも）一般的な写像の条件のもとで不動点定理を証明する研究を行っていたが、論文[2]において、

$$(2)\quad \lambda\|f(x)-f(y)\|^2+(1-\lambda)\|f^2(x)-f^2(y)\|^2 \leq \|x-y\|^2$$

という条件を考案した。話の舞台は実ヒルベルト空間である。また、写像 f の定義域は有界閉凸集合であり、コンパクト性は仮定しない。係数 λ は０と１の間の数、f^2は f の 2 回合成写像である。この条件(2)は写像に要請する条件を一般化する過程で、その特殊ケースとして現れてきたものであるが、一般形よりもむしろこの特殊ケースの方が形が美しいがゆえに筆者としては気に入り、論文中でもさりげなく推している。（論文[2]を初めから通して読んでいただければ、筆者がこっそりと（？）この条件(2)を宣伝しようと画策していることに気が付くかもしれない。）

ここで満足していたら、話は終わっていただろう。実際には、この研究がさらに論文[3]につながっていく。論文[2]の出版が決まった後も証明を繰り返し精査するうちに、2 回合成写像 f^2の部分を f とは独立な写像 g に置き換えて、f と g の共通不動点定理を証明できないかという疑問が湧いた。ふたつの写像 f と g の共通不動点とは、$f(x)=g(x)=x$ を満たす点 x のことである。2 回合成写像 f^2の部分を g に置き換えるというのは、筆者自身が思いつき、2019 年に出版した論文[1]でも用いた思考のテクニックである。この作戦は功を奏し、条件

$$(3)\quad \lambda\|f(x)-f(y)\|^2+(1-\lambda)\|g(x)-g(y)\|^2 \leq \|x-y\|^2$$

を満たすふたつの写像 f,g について、共通不動点の存在定理を証明することができた。写像 f と g の交換可能性の仮定 $f\circ g=g\circ f$ が必要となったが、それは f と f^2についても成り立っていた条件なので、追加的にアドホックな仮定を置いたわけではない。

上の条件(3)は美しいものの少々単純に思えたので、右辺の側も $\|x-y\|^2$と $\|x-y\|^2$（同じもの！）の凸結合とみなし、条件

$$(4)\quad \lambda\|f(x)-f(y)\|^2+(1-\lambda)\|g(x)-g(y)\|^2 \leq \lambda\|x-y\|^2+(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

に置き換えた。見ての通り、条件(4)（⇔条件(3)）は、非拡大写像の条件(1)の凸結合である。そこで、それに換えて、これまで盛んに研究され筆者自身も研究を行ってきた《非拡大写像よりも一般的な写像の条件**の凸結合**》を利用することにした。具体的には、generalized hybrid 写像と呼ばれる写像の条件を用いた。非拡大写像をはじめ様々なタイプの重要な写像を特殊ケースとして包含する、非常に一般的なタイプの写像である。そのうえで、ふたつの写像の共通不動点の存在を証明したのだ。このようにして論文[2]の内容を発展させた研究が、論文[3]として結実したのである。

再度、論文[2]から[3]に至る流れを振り返ってみよう。まず、長い研究史の中で非拡大写像(1)が応用上重要な役割を果たしており、それを一般化する研究が行われていた。一般化するプロセスでシンプルだが美しい条件(2)が特殊ケースとして現れてきた。その特殊ケースを**別方向に**一般化する操作を施した（f^2の部分を g に置き換えた)。当該分野で多用される凸結合を活用し、非拡大写像の条件の凸結合を generalized hybrid 写像の条件の凸結合に一般化した。以上のようなやり方は、遠山啓教授の『無限と連続』（岩波新書）でも説明されている一般化と特殊化のスイッチバック方式の一種と言えるだろうか。

《スイッチバック方式》

このような工夫が常に有効なのかは、筆者の限られた研究経験だけからはわからない。だが、試行錯誤を積み重ねること以外に、個々の研究者にできることはないのではないか。ひとりひとりの研究者ができる限り知恵を絞って工夫を積み重ねることで、ひとつの分野、そして科学全体が発展していくのである。その一端を担う個々の研究者の責任は重い。なお、『どうやって不動点を求めればよいか』という問いに対応する研究でも、最近、論文[4]を出版したのだが、その紹介については紙幅の関係上他日を期する。

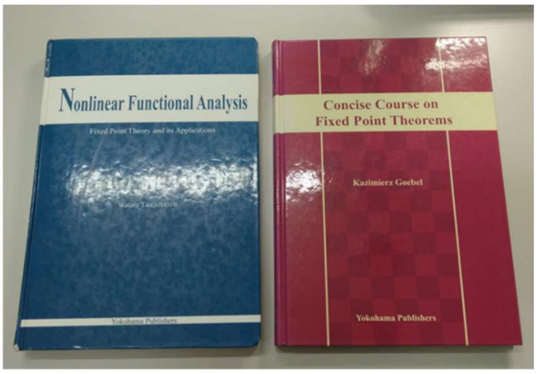
<u>References</u>

[1] “Approximation of a Common Attractive Point of Noncommutative Normally 2-Generalized Hybrid Mappings in Hilbert Spaces,” (co-authored with Wataru Takahashi), *Linear and Nonlinear Analysis,* Vol. 5, No. 2, 279-297, 2019.

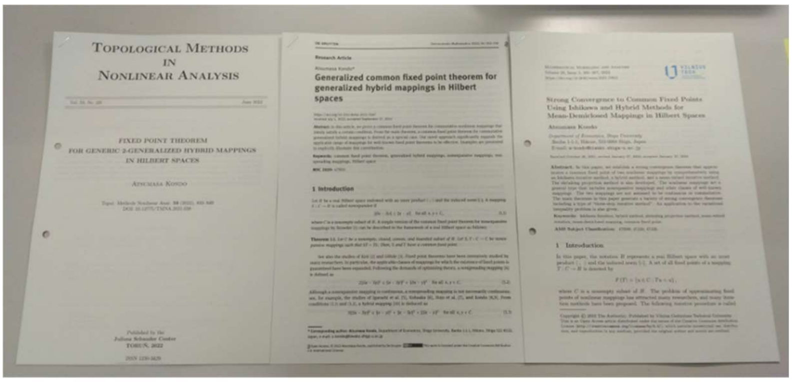
[2] "Fixed point theorem for generic 2-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces," *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, Vol. 59, No. 2B, 833-849, 2022.

[3] "Generalized common fixed point theorem for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces," *Demonstratio Mathematica*, Vol. 55, No.1, 752-759, 2022.

[4] "Strong convergence to common fixed points using Ishikawa and hybrid methods for mean-demiclosed mappings in Hilbert spaces," *Mathematical Modeling and Analysis*, Vol. 28, Issue 2, 285-307, 2023.



不動点理論の専門書



筆者の論文