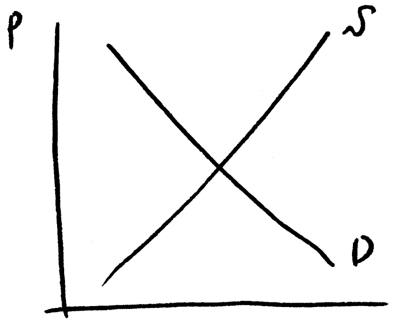
3. 最適化（前半）



需要するのも供給するのも人間.

人間のどのような行動原則から

DやSが導出されているか？

～何らかの**最適化行動**

3.1 企業：利潤最大化と供給曲線の導出

● 工場，機械

労働サービス

⋮

$\xrightarrow[\text{技術}]{\text{生産}}$ 生産物

（生産物を生み出すノウハウ）

何のために生産するか？

利潤最大化

●

利潤		総収入		総費用
$\pi(y)$	$=$	py	$-$	$c(y)$
profit		total revenue		total cost
		TR		TC

p 単価

[円/個]

（1個あたり○円）

$c(y)$　yだけ生産するために最小限必要となるコスト

$TC(y)$と書くこともある。

費用

総費用 ＝ 固定費用 ＋ 可変費用
TC FC VC
fixed cost variable cost

- 固定費用
  生産量が変化しても変わらないコスト
  〃 0のときでもかかる。 $c(0)=FC$

  例. 工場や機械(資本)の維持費

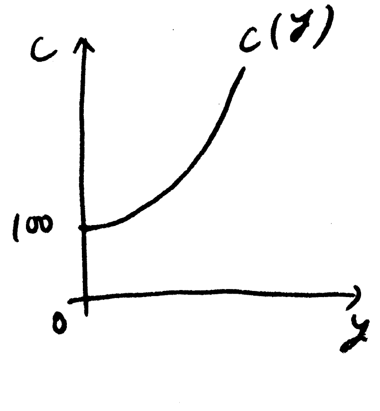
  参考という意味 → cf. 資本
  それ自体が生産された生産要素
  人工の資源

  例. 経理担当の正社員の給料,

- 可変費用
  生産量とともに変化するコスト

  例. マクドナルドでの紙コップやストロー代
  アルバイトの雇用コスト

例. $c(y)=y^2+100$ のとき



$FC=100$ ← 定数
$VC(y)=y^2$ ← yの関数

平均(総)費用 $= \dfrac{\text{総費用}}{\text{生産量}}$ $\left(AC(y) = \dfrac{c(y)}{y} \right)$

ATC (AC)

平均固定費用 $= \dfrac{\text{固定費用}}{\text{生産量}}$ $\left(AFC(y) = \dfrac{FC}{y} \right)$

AFC

平均可変費用 $= \dfrac{\text{可変費用}}{\text{生産量}}$ $\left(AVC(y) = \dfrac{VC(y)}{y} \right)$

AVC

● 限界(げんかい)費用 $= \dfrac{\text{総費用の変化}}{\text{生産量の変化}}$

MC

marginal cost

(Δyが0に近いとき)

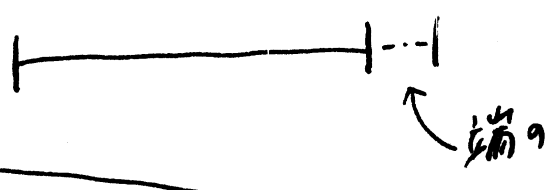
$$MC(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta y} \fallingdotseq \frac{\Delta TC}{\Delta y}$$

TC関数の微係数

●

marginal 限界

周辺の, 端の, 辺境の, 余白に書かれた



MC : 生産量をちょっと増やしたとき,

コストはどれだけ増えるか.

例4.

$c(y) = \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 5y + 10$ のとき

分母に変数が現れる
分数関数
(有理関数)

$FC = 10$

$VC(y) = \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 5y$

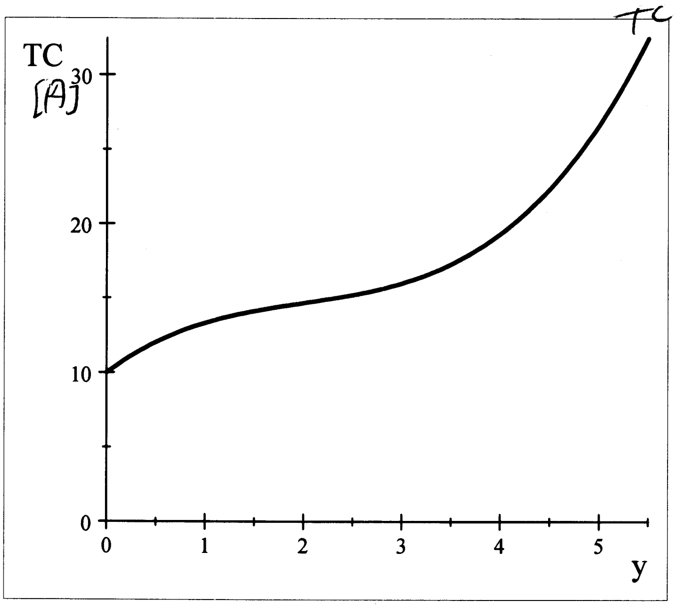
$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 + \frac{10}{y}$

$AFC(y) = \frac{FC}{y} = \frac{10}{y}$

$AVC(y) = \frac{VC(y)}{y} = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5$

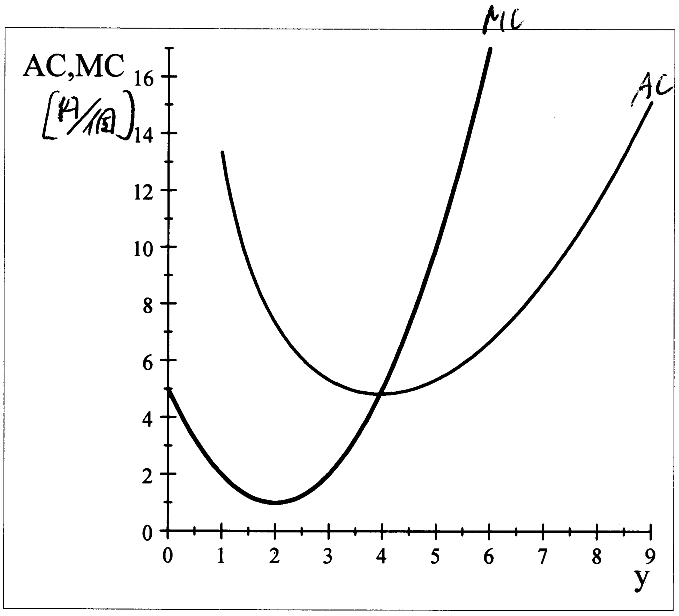
$MC(y) = y^2 - 4y + 5$

$c = \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 5y + 10$



逆S字型の
費用関数

$AC = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 + \frac{10}{y}$
$MC = y^2 - 4y + 5$



◎典型的な AC・MC 曲線の性質

①MC 逓増（ていぞう）

生産量 y が多い範囲では、MC は増加していく。

TC 曲線の傾き

（一定規模の）工場内での混雑などにより生産の効率が悪くなっていくことと対応している。

② U字型の AC 曲線

$TC = FC + VC$ なので

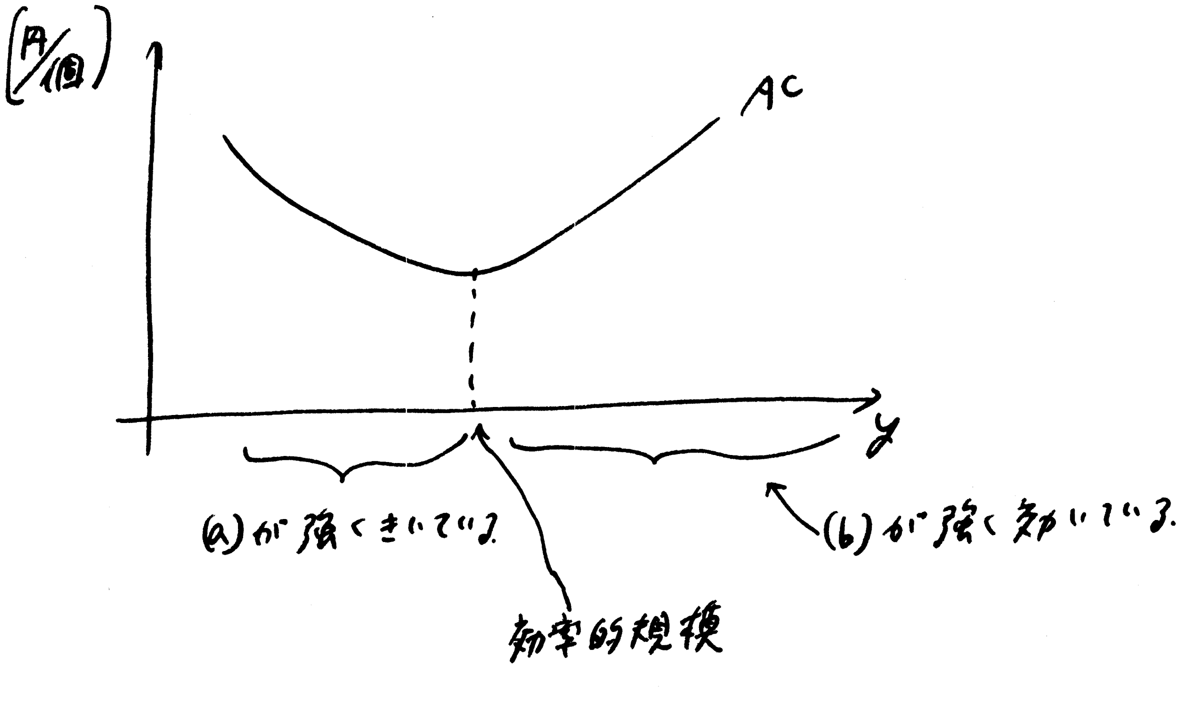
$$AC = \frac{TC}{y} = \underbrace{\frac{FC}{y}}_{(a)} + \underbrace{\frac{VC}{y}}_{(b)}$$

（FC は y とは無関係の定数）

(a) y が小さいときは、かなり大きい。

y が大きくなるにつれ、0 に収束する。

(b) y が大きくなるにつれて、MC 逓増を反映して大きくなる。



③ MCとACの関係

$MC < AC \Rightarrow$ ACは、yとともに減少	(A)
$AC < MC \Rightarrow$ ACは、yとともに増加	(B)

AC 〜 これまでの平均打率
MC 〜 今日の打率
にたとえて考えれば納得しやすい。

今までの打率が3割だったとして、

今日の打率(MC)が、それ以上なら、平均打率(AC)↑

〃　　　　それ以下なら、　〃　　↓

MC曲線とAC曲線が交わる

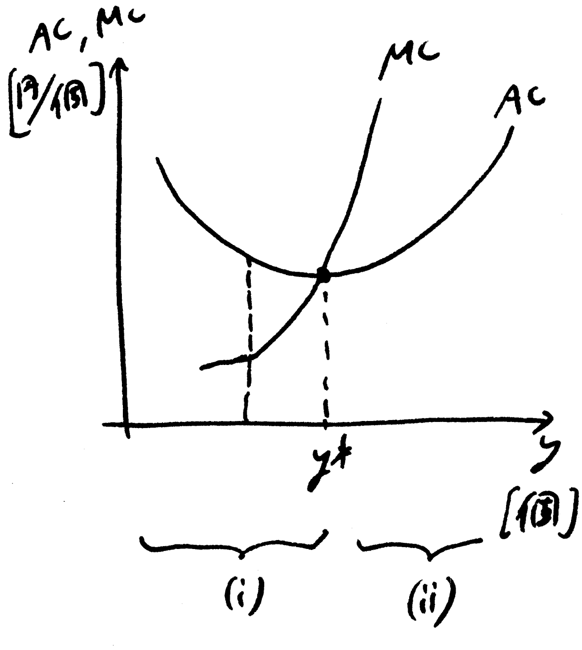
$\xRightarrow{\text{ならば}}$ その点はAC曲線の最小点である。

$y^*(>0)$を $MC(y^*) = AC(y^*)$ をみたす生産量とする。

(i) $y < y^*$ のとき

MC < AC なので (A) より

ACはyとともに減少する。



(ii) $y^* < y$ のとき

AC < MC なので (B) より

ACはyとともに増加する。

AC = MC となる点は、ACが減少から増加に転ずる点なのでAC曲線の最小点である。

おまけ（商の微分公式を用いる。）

$\boxed{\text{AC曲線の最小点において MC曲線とAC曲線は交わる。}}$

さっきと逆！

AC曲線の最小点に対応する生産量を y^* とする。$(y^*>0)$

$$\frac{d}{dy}\left(AC(y)\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{c(y)}{y}\right)$$

$$=\frac{c'(y)y-(y)'\cdot c(y)}{y^2}$$

$$=\frac{MC(y)y-c(y)}{y^2}$$ なので

上の式の分子＝ゼロ

$\frac{dAC}{dy}=0$ より y^* において

$$MC(y^*)y^*-c(y^*)=0$$

$$\therefore MC(y^*)=\frac{c(y^*)}{y^*}$$

$$\therefore MC(y^*)=AC(y^*).$$

//

利潤最大化と供給関数

$$\pi(y) = py - c(y)$$ 収入 − コスト

$$= y\big(p - AC(y)\big)$$ 生産量×価格と平均費用の差

$R(y) = py$ 収入関数 (プライス・テイカーを仮定すると p は定数.)

$$R'(y) = \frac{dR}{dy} = MR(y) = p$$

(marginal revenue)

1単位余分に販売したときの収入は価格に等しい.

利潤最大化

$$\boxed{\max_{y} \ \pi = py - c(y)}$$

1階の条件

$\frac{d\pi}{dy} = 0$ より $p = MC(y)$ 価格 = 限界費用

こうなる理由：
企業は限界的なベネフィット(収入)とコストを考慮して生産量を決定する。

メリット(収入) デメリット(コスト) ⇒ 生産量を決定

$p > MC$ ならば 生産量をもう少しふやせばよい.

$p < MC$ ならば へらせばよい.

最適生産量のとき $p = MC$

$c(y) = y^2$ のケース

一般に価格は p

$\pi = py - y^2$

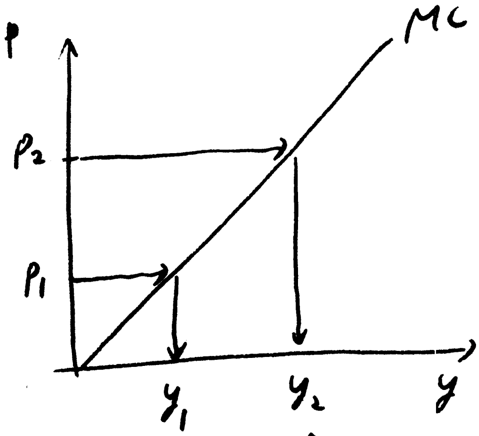
利潤最大化条件

$\frac{d\pi}{dy} = 0$ より　$p = MC(y)$

$\therefore p = 2y$

価格 p が与えられたとき

$p = 2y \ (= MC(y))$ となるように生産量を決定する.



$p_1 = MC(y_1)$

価格が p_1 のときの最適生産量

$p_2 = MC(y_2)$

価格が p_2 のときの最適生産量

つまり、この場合 MC曲線が供給曲線に等しくなっている.

$y = \frac{1}{2}p$

より

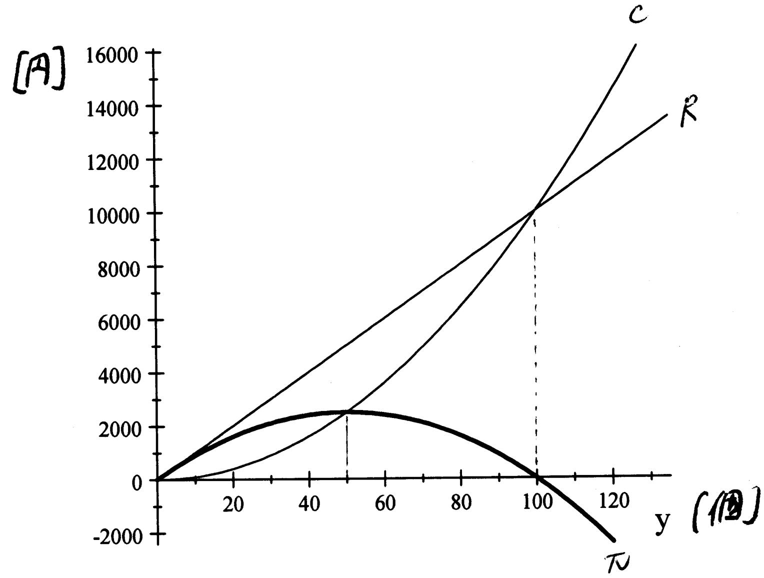
$S(p) = \frac{1}{2}p$

財1個あたり100円、費用関数$c(y) = y^2$**のケース** $p = 100$

$R(y) = 100y$

$c(y) = y^2$

$\pi(y) = 100y - y^2$



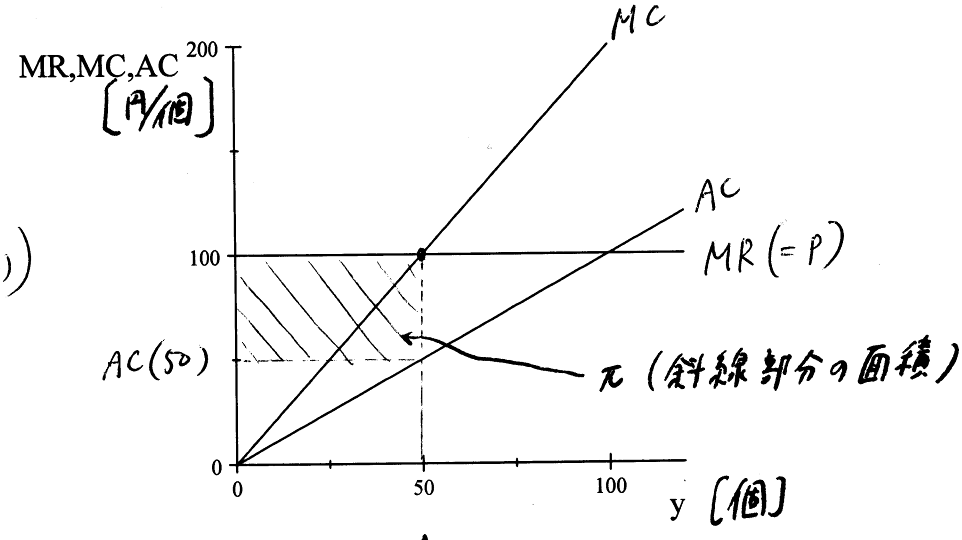
利潤最大化生産量は、

$$\frac{d\pi}{dy} = 0 \text{より} \quad 100 = 2y \quad \therefore\ y = 50$$

$MR(y) = 100$

$MC(y) = 2y$

$AC(y) = y$



$\pi(50) = 50\left(P - AC(50)\right)$

$= 50 \times 50$

$= 2500$

最適生産量

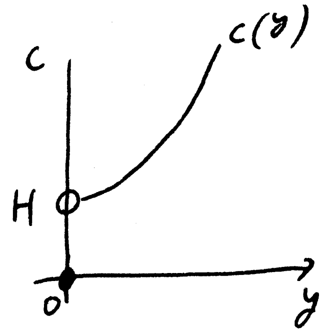
$P = MC(y)$ より

$100 = 2y$

$\therefore y = 50$

費用関数が

$$c(y)=\begin{cases} y^2+H & (y>0\text{のとき}) \\ 0 & (y=0\text{のとき}) \end{cases}$$



のケース.

(注) $H\,(>0)$ は 固定費用とは違う.

$c(0)=0$ だから FC はない.

(土地を借りて, 生産活動をはじめようかと考えているケース.
生産しない $(y=0)$ なら 土地は借りなければいいので $c(0)=0$.)

$$AC(y)=y+\frac{H}{y} \quad (y>0)$$

y が大きいとき, $\frac{H}{y}$ は 0 に近いので

AC 曲線は $AC=y\ (+0)$ に近づく

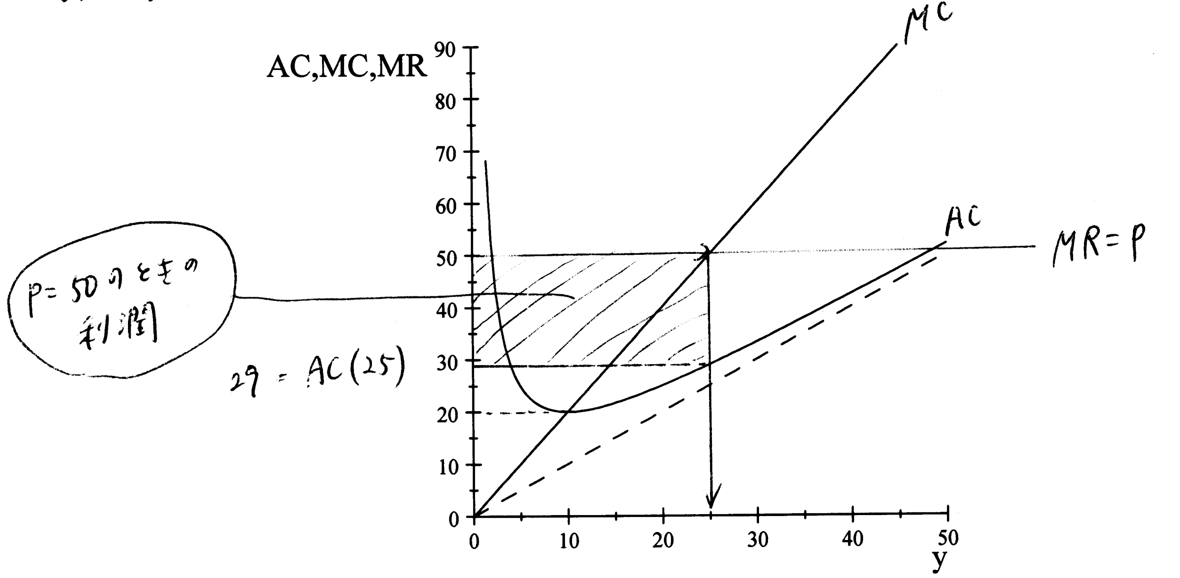
$MC(y)=2y$

$\pi(y)=py-c(y)$

$=py-y^2-H$

$MR(y)=p$

$H = 100$のケース
費用関数 $c(y) = y^2 + 100$　$(y>0)$
$AC(y) = y + \frac{100}{y}$
$MC(y) = 2y$



この場合 $(H=100)$、

- 価格が $P=50$ なら、生産量は

$$P = MC(y)$$

$$\therefore 50 = 2y \text{ より } \underline{y = 25}$$

利潤は $\pi = y\left(P - AC(y)\right)$ なので図の斜線部分となる。

$$= 25 \times (50 - 29)$$

$$= 525$$

- 価格が20以下なら、（企業はプライス・テイカーなので、価格は常に市場から与えられた定数。）

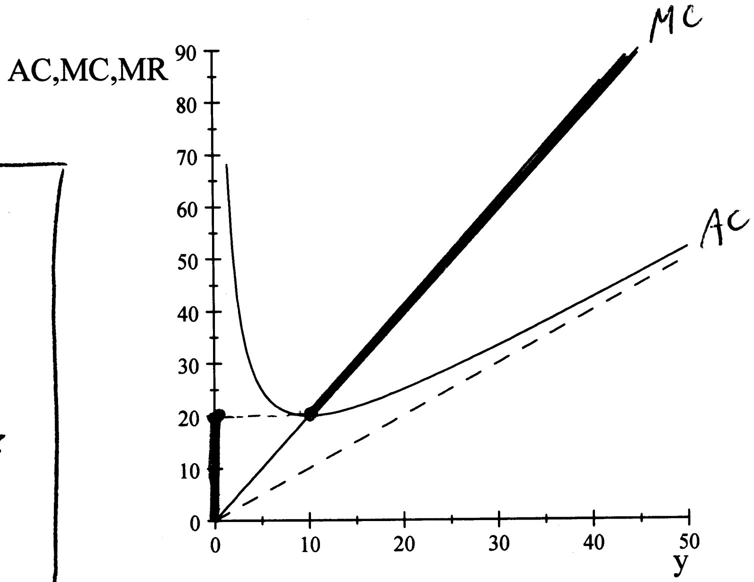
常に $MR(=P)$ より AC曲線が上にあるので、
生産を行うと $(y>0$ だと$)$、π は0以下になってしまう。

$\Longrightarrow$ 価格が $\underset{\text{AC曲線の最低水準}}{\underbrace{20}}$ 以下のときは、供給量は0。

結局、

$$c(y)=\begin{cases} y^2+100 & (y>0\text{のとき}) \\ 0 & (y=0\text{のとき}) \end{cases}$$

のときの供給曲線は、下図の太字部分。



P≧20の範囲では、
供給曲線
＝MC曲線

P≦20の範囲では
供給曲線
＝タテ軸

※ P=20のときは、
y=0でも y=10でも 共に π=0 なので
企業としては、どちらを選択しても無差別。

$$\boxed{S(p)=\begin{cases} \frac{1}{2}p & (p\geqq 20\text{のとき}) \\ 0 & (0\leqq p\leqq 20\text{のとき}) \end{cases}}$$

これが供給関数
この企業の

コア・ミクロA　第3章（前半）
練習問題

1. 費用関数が$c(y) = y^2 + 10$と与えられているとする。ただし、yは生産量を表す。固定費用、可変費用、平均費用、限界費用を求めなさい。

2. 横軸に生産量、縦軸にAC、MCをとった平面で、MC曲線はAC曲線の最低点を通過する。この理由を直感的に説明せよ。

3. 次の2つの文言を数式で表現せよ。
（1）利潤は、売上収入とコストの差額である。
（2）利潤は、と単価と平均的な費用の差生産数量を掛け合わせたものである。

4. ある企業1の費用関数が$c_1(y_1) = 2y_1^2$のとき、AC関数$AC_1(y_1)$、MC関数$MC_1(y_1)$、供給関数$S_1(p)$を求めなさい。

5. ある企業2の費用関数が$c_2(y) = y_2^2$とする。
（1）問題4での企業1と比較して、この企業2の技術は優れているか？ いえるとすれば、どういう意味で優れているのか？
（2）実際に供給関数を求める前に直感で答えなさい。同じ価格pに直面したとして、企業1の供給量$S_1(p)$と企業2の供給量$S_2(p)$はどちらが多くなるだろうか？
（3）企業2のAC関数$AC_2(y_2)$、MC関数$MC_2(y_2)$、供給関数$S_2(p)$を求め、（2）での予想が正しかったか、確認しなさい。

6. ある企業の費用関数が

$$c(y) = \begin{cases} y^2 + 225 & (y > 0\text{のとき}) \\ 0 & (y = 0\text{のとき}) \end{cases}$$

とする。
（1）$y > 0$として、MC関数を求めなさい。
（2）AC関数は、$AC(y) = y + \frac{225}{y}$（ただし、$y > 0$）となる。その曲線は、下図のU字型のグラフである。（直線は、MC曲線）　このAC曲線は$y = 15$のとき、最小値30をとる。この企業の供給関数を求め、供給曲線を太字で描け。