10. 不確実性とリスク

不確実性

環境・自然など意思決定する主体を越えるレベルの話。

誰にも（売り手にも買い手にも）予測がつかない。

例. 半年後に収穫される小麦の生産量

今年の冬が暖冬か厳冬か

（スキー用品を扱っている会社の株価にとって重要）

情報の非対称性

売り手と買い手で持っている情報の量に差がある場合

例. 中古車

（売り手は、その車の品質について多くの情報を
持っているが、買い手はそうでもない。）

株（これも売り手の方が多くの情報を持っている。）

多くの情報を得ることも可能だが、コストがかかる。

期待値　Expectation

コイン投げ

- オモテが出ると 1000円、ウラなら 300円もらえる。

  オモテとウラの出る確率は、どちらも $\frac{1}{2}$.

  事前には、いくらもらえると期待できるか？

$$\underbrace{\frac{1}{2}}\times 1000 + \underbrace{\frac{1}{2}}\times 300 = \underline{650\text{円}}$$ 〈期待値〉

たすと 1

（確率でウェイト付けして たし上げる）

- オモテ → 1000円
  ウラ → −200円　の場合

$$\frac{1}{2}\times 1000 + \frac{1}{2}\times(-200) = \underline{400\text{円}}$$

- サイコロ投げ

  1の目が出る → 100円
  2の目　〃　→ 200円
  ・・・
  6の目が出る → 600円

  この場合の期待値は

$$\frac{1}{6}\times 100 + \frac{1}{6}\times 200 + \cdots + \frac{1}{6}\times 500 + \frac{1}{6}\times 600$$

$$= \underline{350\text{円}}$$

セント・ペテルスブルクの逆説

→ 旧レニングラード（ロシア第2の都市）

オモテが出るまでコインを投げつづける。

コインにゆがみはない。（よってオモテとウラが出る確率は両方 $1/2$。）

1回目 $\xrightarrow{\text{オモテ}}$ 2円もらえる（賞金）

↓ ウラ

2回目 $\xrightarrow{\text{オモテ}}$ 2^2円もらえる

↓ ウラ

3回目 $\xrightarrow{\text{オモテ}}$ 2^3円もらえる

↓ ウラ

⋮

つまり、n回目ではじめてオモテが出ると 2^n円もらえる。

「1回目ではじめてオモテが出る」確率は、$\frac{1}{2}$。

「2回目で　〃　」　〃　$\frac{1}{2^2}$。

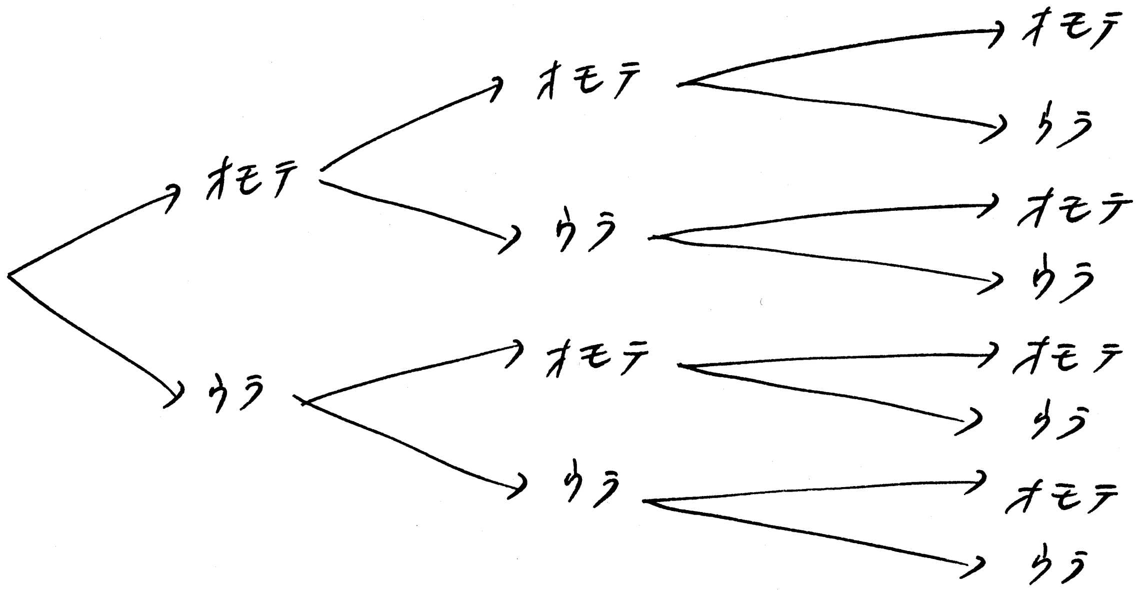
なぜなら、2回コインを投げて起こりうる

（オモテ，ウラ），（オモテ，オモテ），（ウラ，ウラ），（ウラ，オモテ）

の4通りの結果の中で、「2回目にはじめてオモテが出る」のは

最後の1つのみだから。

同様に、「n回目ではじめてオモテが出る」確率は $\frac{1}{2^n}$。



1回目

2通り

2回目

$2 \times 2 = 2^2$ 通り

3回目

$2^2 \times 2 = 2^3$ 通り

3回目ではじめてウラが出る確率は

$$\frac{1}{2^3}$$

このコイン投げゲームの賞金の期待値は？

$$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2^2} \times 2^2 + \frac{1}{2^3} \times 2^3 + \cdots$$

全部たすと1になる.

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots$$

$$= \infty$$

得られる利得の期待値は∞になるが、だからといって
100万円支払って このゲームに参加したいか？

No！の人が多いだろう。

〈セント・ペテルスブルクのパラドックス〉

$$\boxed{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 1}$$

となることの説明

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \left(x = \frac{1}{2}\text{のケース}\right)$$

$$= 1. \quad //$$

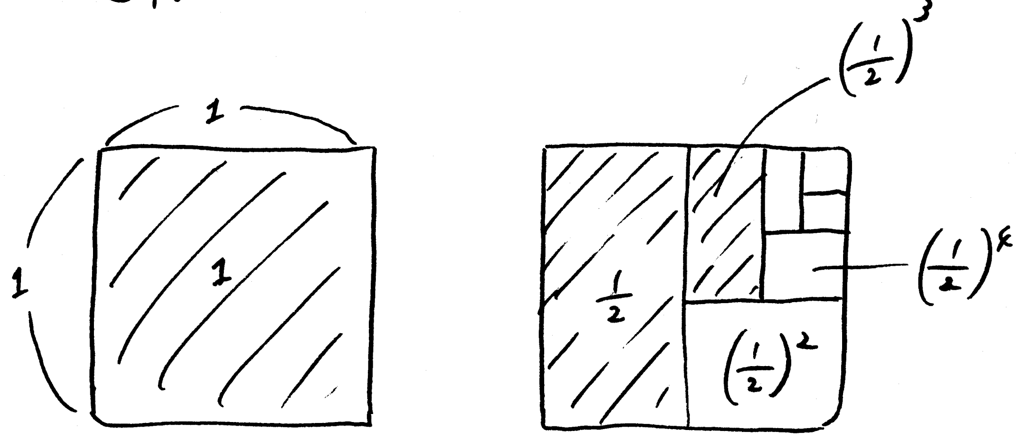
定理（等比級数の公式）

$-1 < x < 1$ のとき

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

上の数学の定理の図を用いた説明

一辺の長さが1の正方形（面積 = 1）



$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

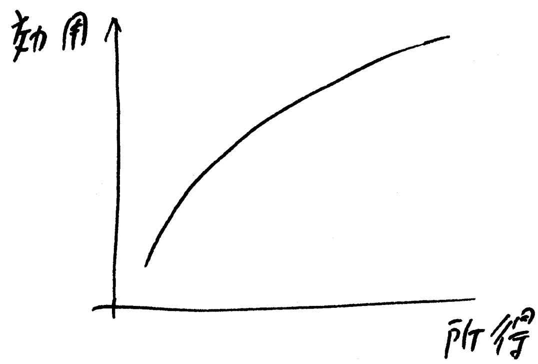
全部たしていくと、その和はどの値に収束する（近づく）だろうか？

答 2つの正方形の面積の和 = 2.

パラドックスの原因

- 利得の期待値ではなく、
  「利得から得られる効用」の期待値 をとるべき。

- 多くの人の効用は、所得の増加とともに限界効用(MU)が逓減するだろう。



このような効用関数を前提にすれば、多くの人が賭に参加しないという現実を説明できる。
(→後で)

期待効用
（効用の期待値のこと）

所得 x に対して、ある主体が得る効用を

$u(x)=\sqrt{x}$ とする。

確率 $\frac{1}{2}$ で災害にあう ⇒ 所得 100円

〃 $\frac{1}{2}$ で災害にあわない ⇒ 所得 400円

とする。

- 所得の期待値 $= \frac{1}{2}\times 100 + \frac{1}{2}\times 400 = \underline{250}$ 円

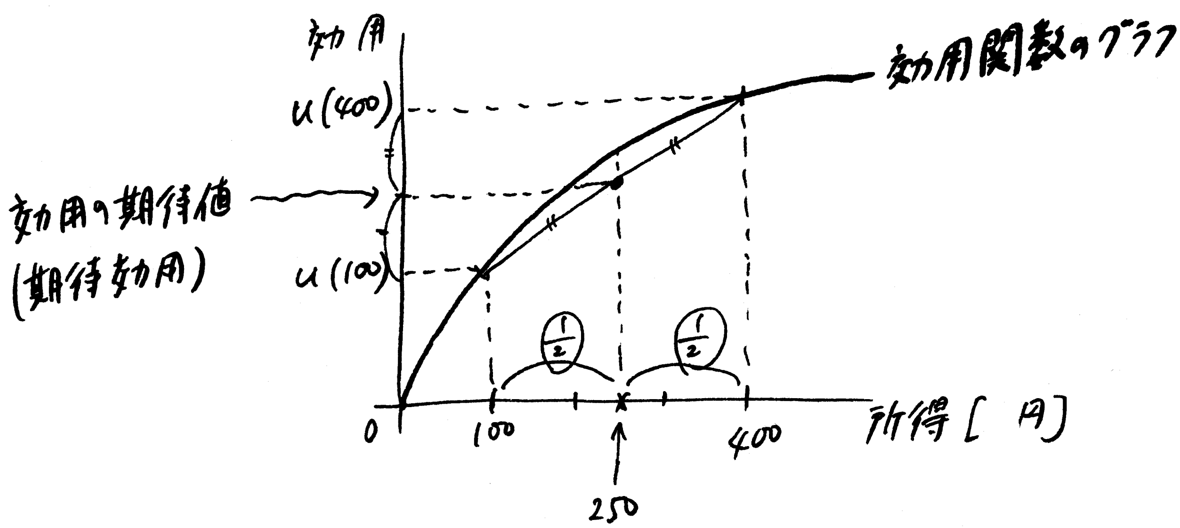
区別せよ！

- 期待効用
（=効用の期待値）

$$= \frac{1}{2}\times u(100) + \frac{1}{2}u(400)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{100} + \frac{1}{2}\sqrt{400}$$

$$= 5 + 10 = \underline{15}$$



所得の期待値（期待所得）

例.

効用関数を $u(x)=\sqrt{x}$ とする。

(xは所得水準)

(確率αで所得x_1になる。
〃 $1-\alpha$ 〃 x_2になる。)

・所得の期待値 $=\underline{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2}$ $= Ex$ ($E[x]$)
などと書くこともある。

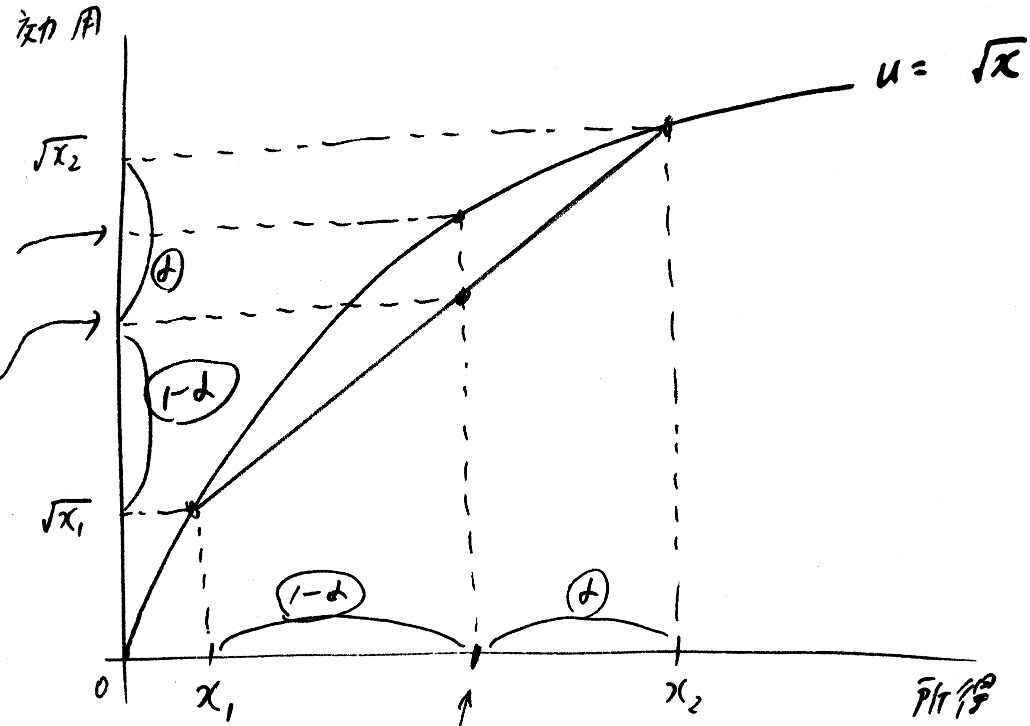
・期待効用(効用水準の期待値

$$=\alpha u(x_1)+(1-\alpha)u(x_2)$$

$$=\underline{\alpha\sqrt{x_1}+(1-\alpha)\sqrt{x_2}}$$

$u(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$
$=\sqrt{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2}$

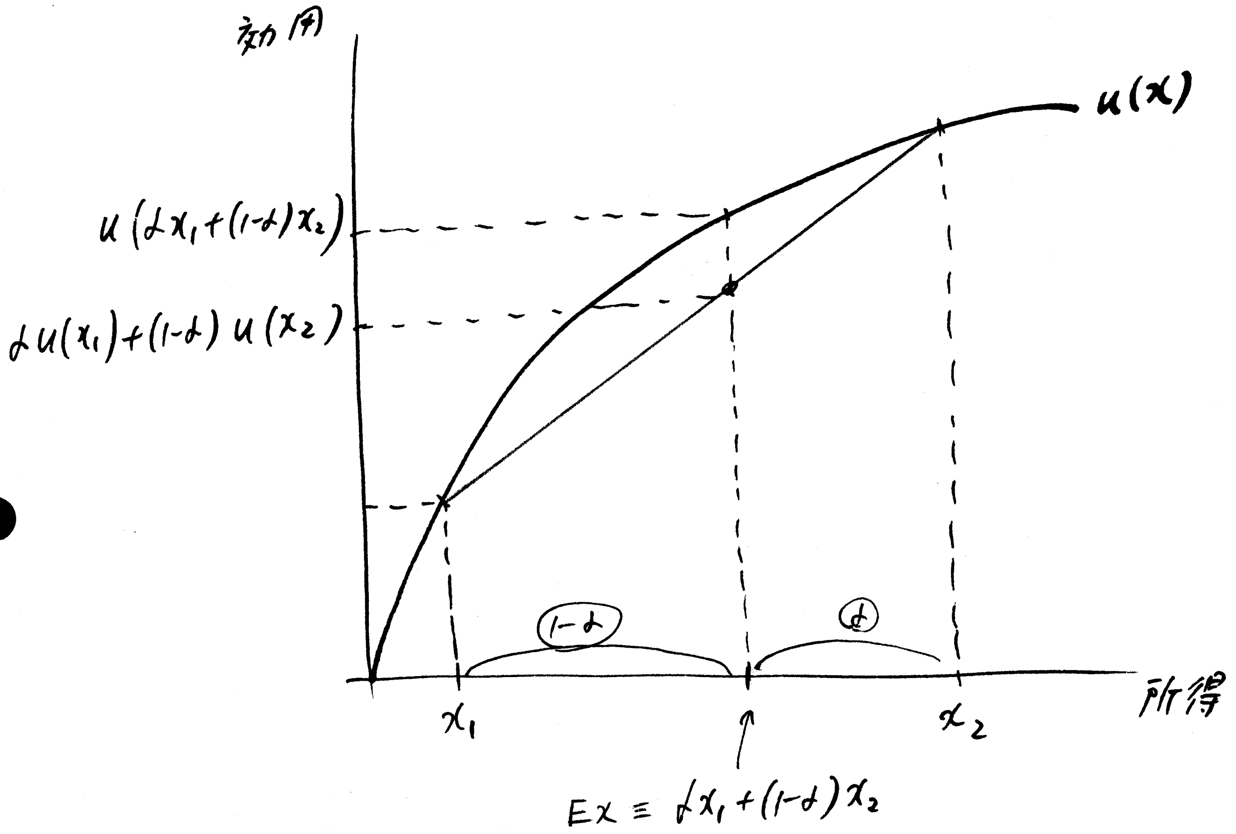
$\alpha u(x_1)+(1-\alpha)u(x_2)$
$=\alpha\sqrt{x_1}+(1-\alpha)\sqrt{x_2}$
〈期待効用〉



$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$
〈所得の期待値〉
(内分点の位置に注意!)

危険に対する態度

(i) 上に凸な効用関数をもつ主体（危険回避者）



$$u(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$$

$$>\alpha u(x_1)+(1-\alpha)u(x_2)$$

となっている。

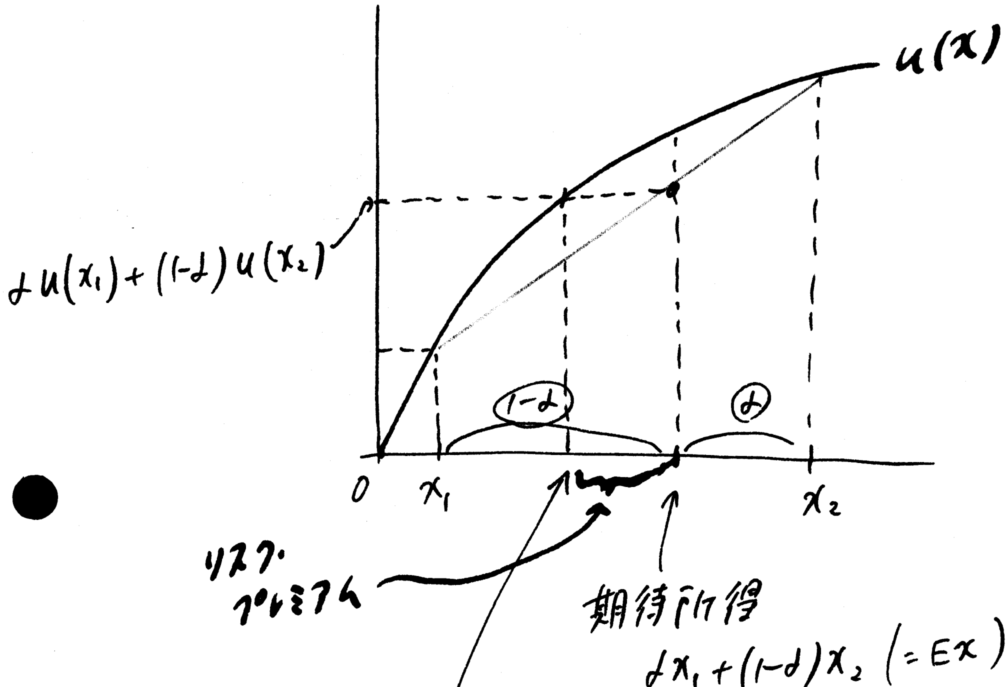
所得の期待値Exからえられる効用
確実にExえられるならば これだけうれしい！

期待効用。
所得が確率的に変動する不確実な状況での効用の期待値。
これぐらいの満足感がえられると期待できる！

この不等号が成り立つということは、
この消費者は不確実性（リスク）を嫌っているということ。

〈危険回避者〉

危険回避度を測る尺度
～リスク・プレミアム



所得水準
$\begin{cases} x_1 & (確率\ \alpha) \\ x_2 & (\ 〃\ \ 1-\alpha) \end{cases}$
という状況

C

確実同値額 (CE ; certainty equivalent)

$$u(C)=\alpha u(x_1)+(1-\alpha)u(x_2)$$

をみたす所得水準。

「確実にそれだけの所得をえられるならば、期待効用水準だけの効用をえられる」という所得水準

$$\boxed{\text{リスク・プレミアム} = \text{期待所得} - \text{確実同値額}}$$

危険を嫌う人ほど、
リスク・プレミアムは大きくなるだろう。
（なぜか？）

例

効用関数 $u(x)=\sqrt{x}$ （x；所得水準）

$$\begin{cases} 100\text{円} & (\text{確率 } 1/10) \\ 900\text{円} & (\text{〃 } 9/10) \end{cases}$$ という賭。

(1) この賭の期待値は？（期待所得）

$$\frac{1}{10}\times 100+\frac{9}{10}\times 900=10+810=\underline{820\text{円}}$$

(2) 期待効用は？

$$\frac{1}{10}\times u(100)+\frac{9}{10}\times u(900)$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{100}+\frac{9}{10}\sqrt{900}$$
$$=\frac{1}{10}\cdot 10+\frac{9}{10}\cdot 30=\underline{28}$$

(3) リスク・プレミアムを求めよ。

まず確実同値額を求める。

$$u(C)=\frac{1}{10}u(100)+\frac{9}{10}u(900)$$

期待効用

この式をみたすCを求める。

$$\therefore \sqrt{C}=\frac{1}{10}\sqrt{100}+\frac{9}{10}\sqrt{900}$$
$$\therefore \sqrt{C}=28$$
$$\therefore C=\underline{784\text{円}}$$

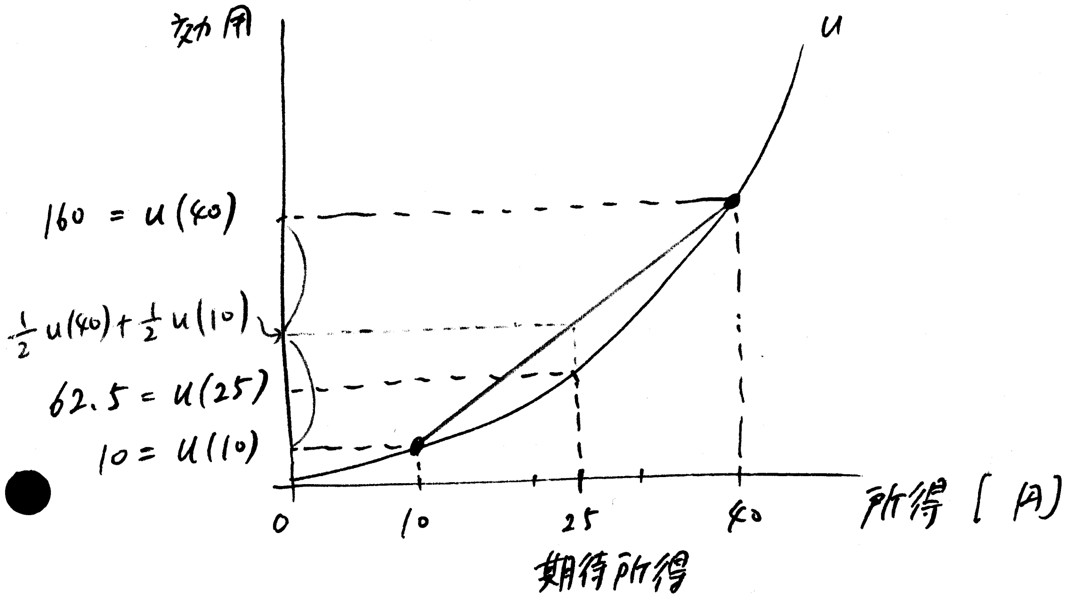
リスク・プレミアムは、

期待所得－確実同値額 $=\underline{36\text{円}}$

※効用関数や、賭の内容（賞金や割りふられている確率）が変われば、これらの値は、当然変わってくる。

(ii) 下に凸な効用関数をもつ主体（危険愛好者）

例えば $u(x) = x^2/10$ （x；所得水準）



$$\begin{cases} x = 40\text{ 円} & (\text{確率 } 1/2) \\ x = 10\text{ 円} & (\text{〃 } 1/2) \end{cases}$$

・期待所得 $= \frac{1}{2}\times 10 + \frac{1}{2}\times 40 = \underline{25\text{円}}$

・期待効用 $= \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(40) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10^2}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{40^2}{10}$

$= \underline{85}$

・期待所得を確実にもらえるときの効用

$u\left(\frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot 40\right) = u(25) = \underline{62.5}$

よって $u\left(\frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot 40\right) < \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(40)$

より一般に

$$x = \begin{cases} x_1 & \text{確率 } \alpha \\ x_2 & \text{〃 } 1-\alpha \end{cases}$$

という賭を考える。

効用関数 $u(x)$ が下に凸な場合

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) < \alpha u(x_1) + (1-\alpha) u(x_2)$$

期待所得を確実にもらえる時の効用水準　　　期待効用

確実性よりも、むしろ不確実な状況を好んでいる。

〈リスク愛好者〉
（危険）

※ 危険愛好者の場合、リスクプレミアムはマイナスになる。

(iii) グラフが直線になる効用関数をもつ主体（リスク中立者）

不確実な状況下での期待効用
＝ 期待所得に等しい額を確実に得ることからの効用

※ 危険中立者の場合、リスク・プレミアムはゼロになる。

セント・ペテルスブルクのパラドックスに戻る。

所得 x が不確実に変動する状況。

貨幣的効用関数を

$$u(x)=\sqrt{x}$$

とする。

セント・ペテルスブルクのコイン投げは、

確率 $\frac{1}{2}$ で　2 円

〃 $\frac{1}{2^2}$ で　2^2 円

〃 $\frac{1}{2^3}$ で　2^3 円

－－・・

もらえるのであった。

このコイン投げの期待効用は？

$$\frac{1}{2}u(2)+\frac{1}{2^2}u(2^2)+\frac{1}{2^3}u(2^3)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^2}\cdot(2^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^3}\cdot(2^3)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^4}(2^4)^{\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\quad\underset{\sim\sim}{<3}$$

参加費がたとえ3円でも、このコイン投げには参加しない!!

コア・ミクロA　第10章

練習問題

1. あるレストランの7月1日の売り上げは、例年、雨であれば10万円、雨が降らなければ20万円とする。今年の天気予報では、7月1日に雨の確率は40%、雨が降らない確率は60%だそうである。今年の7月1日の売り上げの期待値はいくらか？

2. 効用関数は、$u(x) = \sqrt{x}$とする。ただし、xは所得水準を表す。次の場合の、期待所得（所得の期待値）と期待効用を、それぞれ求めよ。
(1)所得が、確率$1/2$で400円、確率$1/2$で900円。
(2)所得が、確率$1/4$で400円、確率$3/4$で100円。

3. 効用関数は、$u(x) = \sqrt{x}$とする。ただし、xは所得水準を表す。次の場合の、リスク・プレミアムを求めよ。
(1)所得が、確率$1/2$で400円、確率$1/2$で900円。
(2)所得が、確率$1/4$で400円、確率$3/4$で100円。

4. 効用関数は、$u(x) = x^2/100$とする。ただし、xは所得水準を表す。所得は、確率$1/2$で800円、確率$1/2$で1000円となる。
(1)リスク・プレミアムはプラスになるか、マイナスになるか？ 根拠とともに答えよ。
(2)実際にリスク・プレミアムを計算し、(1)での予想が正しかったか確認せよ。

5. 以下の表は、2種類の資産（スキー用品会社の株とアパレル会社の株）を1単位保有することから得られる3パターンの状態（暖冬、平年並み、厳冬）ごとの利得を表している。状態の起きる確率は、それぞれ$1/3$であるとする。

	暖冬	平年並み	厳冬
スキー用品	0	4	16
アパレル	1	4	15

(1)それぞれの株のみを保有した場合の利得の期待値を求めよ。
(2)ある個人の効用関数を$u(x) = \sqrt{x}$とする。ここで、xは利得である。この個人は、期待効用を最大化したいとする。2種類の資産のうち一つだけを保有できる場合、この個人はどちらの資産を選択するか？
(3)ある個人の効用関数を$u(x) = x^2$とする。ここで、xは利得である。この個人は、期待効用を最大化したいとする。2種類の資産のうち一つだけを保有できる場合、この個人はどちらの資産を選択するか？